

## تحلیل دینامیکی صفحات کامپوزیتی متقارن با تکیه‌گاه خطی

محمد رحیم ترشیزیان<sup>۱</sup> و جعفر اسکندری جم<sup>۲</sup>

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، دانشکده مهندسی مکانیک و هوافضا

### چکیده

تحقیق حاضر به منظور بررسی ارتعاشات آزاد صفحات کامپوزیتی متقارن با تکیه‌گاه‌های خطی میانی با استفاده از یک‌سری توابع تغییرشکل پیشنهادی انجام شده است. این توابع ضمن سادگی و کارآمدی، نتایج عددی بسیار دقیقی را نیز ارائه می‌نمایند. به علاوه، این توابع تغییرشکل پیشنهادی قادرند شرایط مرزی هندسی در لبه‌های صفحه و همچنین شرایط تغییرشکل صفر در تکیه‌گاه‌های خطی را ارضاء نمایند. برای تحلیل و حل معادلات حاکم بر ارتعاشات آزاد صفحات کامپوزیتی از روش ریلی‌ریتز استفاده شده است. برای اطمینان از صحت نتایج عددی توابع تغییرشکل پیشنهادی و تاثیر آنها بر رفتار ارتعاشی صفحات کامپوزیتی متقارن با تکیه‌گاه‌های خطی میانی چند مثال برای شرایط مرزی، خواص مکانیکی و زاویه چیدمان متفاوت ارائه شده است. مقایسه نتایج فوق با مراجع معتبر حاکی از صحت این پیشنهاد می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات آزاد، صفحات کامپوزیتی، تکیه‌گاه خطی میانی، توابع تغییرشکل

## Dynamic Analysis of Symmetrically Laminated Composite Plates with Intermediate Line Supports

M.R. Torshezian and J. Eskandari-Jam

Mechanical and Aerospace Engineering Department, Science and Research Branch, Islamic Azad University

### ABSTRACT

The present study is performed to survey the free vibrations of symmetrically laminated rectangular composite plates with intermediate line supports, using a set of proposed admissible functions. These functions, in spite of their simplicity and efficiency, present very exact numerical results. Furthermore, the proposed admissible functions are able to support the geometric boundary conditions in the edge of the plates and also the zero deflection conditions. To analyze and to solve the equation of the free vibrations of symmetrically laminated composite plates, the Rayleigh-Ritz approach has been applied. To make sure about the validity of the numerical results, the proposed admissible functions and their effects on the vibrations of symmetrically laminated rectangular composite plates with intermediate line supports, some examples have been presented to cover different boundary conditions, different mechanical properties, and different fiber orientation angles. The comparison of the results, confirms the validity of the proposal.

**Key Words:** Free Vibrations, Laminated Composite Plates, Intermediate Line Supports, Displacement Functions

۱ - دانشجوی دکتری (نویسنده مخاطب): torhim20@yahoo.com

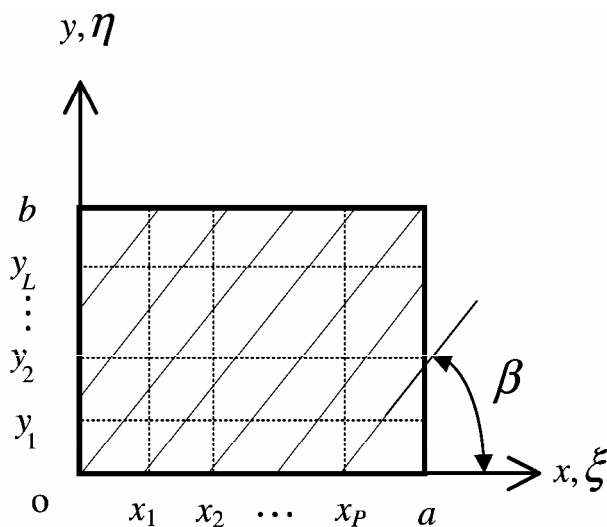
۲ - استادیار: jejam@mail.com

۱ - مقدمه

به منظور مشتق گیری و حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات صفحات کامپوزیتی استفاده شده است. نتایج این تحقیق بدلیل کمبود منابع در زمینه ارتعاشات صفحات کامپوزیتی متقارن با تکیه‌گاه‌های خطی میانی، می‌تواند مرجعی مناسب برای محققین باشد.

۲ - معادلات حاکم

در شکل ۱ یک صفحه کامپوزیتی با  $P$  و  $T$  تکیه‌گاه خطی در جهت‌های  $x$  و  $y$  نشان داده شده است. ساختار این صفحه کامپوزیتی دارای  $n$  لایه اورتروپیک متقارن با ضخامت یکنواخت  $h$  در جهت  $z$  مطابق شکل ۲ و ابعاد هندسی  $a \times b$ ، دانسیته جرمی  $\rho$ ، مدول‌های الاستیسیته هر لایه در جهات اصلی  $E_{11}$  و  $E_{22}$ ،  $G_{12}$  مدول برشی،  $U_{12}$  و  $U_{21}$  ضرایب پواسون می‌باشد. زاویه چیدمان الیاف ( $\beta$ ) نسبت به محور  $x$  ها اندازه‌گیری می‌شود.



شکل (۱): صفحه کامپوزیتی با تکیه‌گاه خطی میانی.

از آنجایی که در صفحات کامپوزیتی متقارن ماتریس سفتی  $B_{ij} = 0$  است، می‌توان انرژی کرنشی و جنبشی را بر حسب  $W$  بیان کرد. بنابراین ماکزیمم انرژی‌های کرنشی و جنبشی برای تعیین فرکانس‌های طبیعی ( $\omega$ ) صفحه به صورت زیر خواهند بود:

امروزه استفاده از سازه‌های جدارنازک و همچنین مواد کامپوزیتی، در صنایع مختلف اعم از صنایع هوابیمایی، صنایع کشتی‌سازی، صنایع موشکی و غیره کاربرد ویژه‌ای یافته است. علت این موضوع را می‌توان در نسبت بسیار بالای استحکام به وزن در این سازه‌ها و همچنین قابلیت کنترل در خواص ساختاری‌شان به خاطر تغییر جهت در جهت‌گیری زوایا و تعداد لایه‌های آنها باعث انتخاب مواد کامپوزیتی مناسب در دامنه وسیع آنها دانست. با توجه به استفاده بسیار گسترده از سازه‌های جدارنازک و صفحات کامپوزیتی در ساختار سازه‌های هوایی نیاز به روش‌های دقیق جهت تحلیل‌های سازه‌ای احساس می‌شود. معادلات دیفرانسیل حاکم بر این صفحات کامپوزیتی متقارن با وجود مشتقات اضافی در ترم‌هایی که شامل  $D_{16}$  و  $D_{26}$  می‌شود بدست آوردن راه حل دقیق معادلات را حتی برای مواردی که همه لایه‌های صفحه به صورت تکیه‌گاه‌های ساده هستند، ناممکن می‌کند [۱]. بنابراین می‌بایست از روش‌های عددی برای حل اینگونه مسائل استفاده شود.

در خصوص ارتعاشات صفحات با شرایط مرزی متفاوت تحقیقات وسیعی انجام شده است. لیزا و ناریتا [۲] با استفاده از تئوری کلاسیک، ارتعاشات اینگونه مسائل را بررسی کردند. بعضی از محققان [۳-۶] ارتعاش آزاد صفحات کامپوزیتی را با استفاده روش‌های ریلی ریتز و اجزاء محدود مطالعه کردند. بعضی از محققین [۷] برای اولین بار ارتعاشات صفحات ایزوتروپیک را با در نظر گرفتن دسته‌ای از توابع تیر استاتیک برای تکیه‌گاه خطی بررسی نمودند. چنگ و زو [۸] با استفاده از روش ریلی ریتز ارتعاشات صفحات کامپوزیتی متقارن با تکیه‌گاه خطی میانی را ارائه کردند.

در این تحقیق، با توسعه و گسترش مطالعات محققین [۸] یک مجموعه از توابع تغییرشکل قابل قبول ارائه شده است. این توابع برای تحلیل ارتعاشات صفحات کامپوزیتی متقارن با تکیه‌گاه‌های خطی میانی در یک یا دو جهت مورد استفاده قرار می‌گیرند. این توابع ضمن ارضاء شرایط مرزی هندسی در لایه‌ها، شرایط تعیین‌مکان صفر را در تکیه‌گاه‌های خطی میانی نیز ارضاء می‌کنند. همچنین این مجموعه توابع پیشنهادی، می‌توانند به طور کامل عدم پیوستگی نیروهای برشی در تکیه‌گاه‌های خطی را توصیف کنند. در ادامه از روش ریلی ریتز

با جایگذاری معادله (۳) در معادلات انرژی (۱ و ۲) و اعمال روش ریلی-ریتز، معادله حاکم بر فرکانس طبیعی صفحه کامپوزیتی بدست خواهد آمد:

$$\frac{\partial(U_{\max} - T_{\max})}{\partial C_{ij}} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, M \quad \text{و} \quad (5)$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

$$\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [K_{ijmn} - \lambda^2 F_{im}^{00} G_{jn}^{00}] C_{ij} = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, M \quad \text{و} \quad (6)$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

در رابطه بالا،

$$K_{ijmn} = \{D_{11} F_{im}^{22} G_{jn}^{00} + \gamma^4 D_{22} F_{im}^{00} G_{jn}^{22} + \gamma^2 D_{12} [F_{im}^{02} G_{jn}^{20} + F_{im}^{20} G_{jn}^{02}]$$

$$+ 2\gamma D_{16} [F_{im}^{21} G_{jn}^{01} + F_{im}^{12} G_{jn}^{10}]$$

$$+ 2\gamma^3 D_{26} [F_{im}^{01} G_{jn}^{21} + F_{im}^{10} G_{jn}^{12}]$$

$$+ 4\gamma^2 D_{66} F_{im}^{11} G_{jn}^{11}\} / D_0, \quad (7)$$

$$F_{im}^{rs} = \int_0^1 \frac{d^r X_i(\zeta)}{d\zeta^r} \frac{d^s X_m(\zeta)}{d\zeta^s} d\zeta$$

$$G_{im}^{rs} = \int_0^1 \frac{d^r Y_j(\eta)}{d\eta^r} \frac{d^s Y_n(\eta)}{d\eta^s} d\eta$$

$$r, s = 0, 1, 2, \dots$$

با در نظر گرفتن  $\gamma = \frac{a}{b}$  و  $D_0 = \frac{E_{11} h^3}{12(1 - \nu_{12} \nu_{21})}$  معادله

بدون بعد فرکانس طبیعی صفحه به صورت زیر بیان می شود:

$$\lambda^2 = \frac{\rho h \omega^2 a^4}{D_0} \quad (8)$$

از حل معادله ۶ فرکانس های طبیعی و ضرایب ثابت شکل مودها بدست می آیند.

### ۳ - توابع تغییر شکل پیشنهادی

توابع تغییر شکل در این تحقیق برای تکیه گاه ساده، گیردار و آزاد در لبه ها با یک تکیه گاه خطی میانی در وسط صفحه به صورت زیر پیشنهاد شده است:

$$Z_i(\zeta) = \sin(2i\pi\zeta),$$

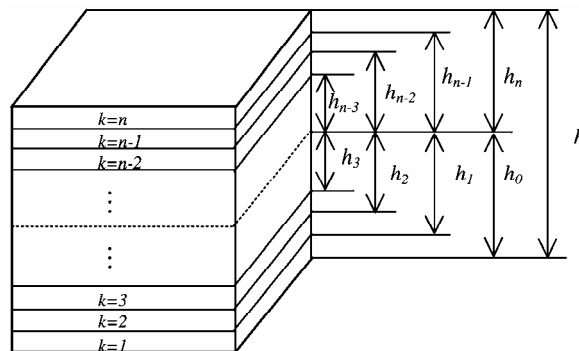
$$0 < \zeta < 1 \quad \text{تکیه گاه ساده}$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ D_{11} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right]^2 + 2D_{12} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] + D_{22} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right]^2 \right.$$

$$\left. + 4D_{16} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] + 4D_{26} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] + 4D_{66} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right]^2 \right\} dy dx \quad (1)$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \rho h \omega^2 \int_0^a \int_0^b W^2(x, y) dy dx \quad (2)$$

در روابط بالا،  $W(x, y)$  تابع تغییر شکل و  $D_{ij}$  ضرایب سفتی ماتریس خمشی می باشند.



شکل (۲): موقعیت قرارگیری لایه ها.

در ادامه با فرض  $\zeta = \frac{x}{a}$ ،  $\eta = \frac{y}{b}$  و به کارگیری روش جدایی متغیرها، تابع تغییر شکل  $W(\zeta, \eta)$  به صورت زیر استخراج می شود:

$$W(\zeta, \eta) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N C_{ij} X_i(\zeta) Y_j(\eta) \quad (3)$$

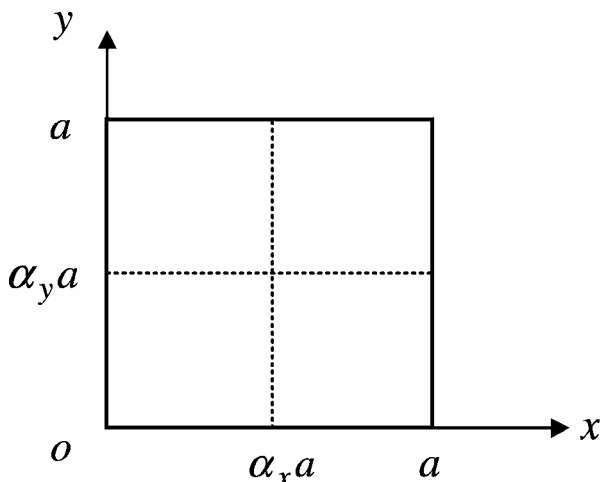
در رابطه بالا،  $C_{ij}$  ضرایب مجهول،  $M$  و  $N$  مرتبه قریب توابع تغییر شکل در جهت های  $\zeta$  و  $\eta$  می باشند. همچنین:

$$X_i(\zeta) = Z_i(\zeta) \quad (i = 1, 2, \dots, M) \quad \text{و}$$

$$Y_j(\eta) = Z_j(\eta) \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (4)$$

توابعی هستند که شرایط مرزی هندسی در لبه ها و شرایط تغییر شکل صفر را در تکیه گاه های خطی میانی صفحه در جهت  $\zeta$  و  $\eta$  ارضاء می کنند [۷ و ۸].

فرکانس‌های طبیعی به صورت پارامترهای بی‌بعد جدول ۱ شش فرکانس اول یک صفحه مربع شکل ایزوتروپیک استخراج و با نتایج مراجع معتبر مقایسه شده‌اند. فرکانس‌های طبیعی با افزایش ترم‌های توابع تغییر شکل بطور یکنواخت به مقادیر دقیق همگرا می‌شوند. معمولاً در صفحات ایزوتروپیک تعداد کمی از ترم‌های توابع تغییر شکل برای رسیدن به نتایج دقیق کافی است، ولی همگرایی در صفحات کامپوزیتی به بخاطر وجود گشتاورهای پیچشی، خمشی قدری نسبت به صفحات ایزوتروپیک کند می‌باشد.



شکل (۳): صفحه کامپوزیتی متقارن با تکیه‌گاه خطی میانی در هر طرف.

جدول (۱): شش فرکانس اول یک صفحه ایزوتروپیک،

$$\nu_{12} = \nu_{21} = 0.3, D_{11} = D_{22} = D = Eh^3 / [12(1 - \nu^2)]$$

$$D_{66} = (1 - \nu)D / 2$$

با یک تکیه‌گاه خطی میانی در هر سمت و شرایط مرزی متفاوت. ( $\alpha_x = \alpha_y = 0.5$ )

Results	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
SS-SS						
Current	78.956	95.076	95.076	109.405	197.968	197.968
Ref. [4]	78.960	94.680	94.720	108.440	197.400	197.960
Ref. [5]	78.958	94.826	94.826	108.410	197.500	197.500
Ref. [6]	78.957	94.585	94.585	108.220	197.390	197.390
Ref. [8]	78.957	94.590	94.590	108.240	197.392	197.392
CC-CC						
Current	108.830	127.226	127.226	144.863	242.930	242.930
Ref. [8]	108.299	127.417	127.417	144.109	242.109	243.778
FF-FF						
Current	13.560	21.239	21.239	28.935	71.218	78.051
Re. [8]	13.563	21.566	21.571	27.919	70.846	77.837

$$Z_j(\eta) = \sin(2j\pi\eta),$$

$$0 < \eta < 1$$

$$Z_i(\zeta) = 1 - \cos(4i\pi\zeta),$$

$$0 < \zeta < 1$$

تکیه‌گاه گیردار

$$Z_j(\eta) = 1 - \cos(4j\pi\eta),$$

$$0 < \eta < 1$$

$$Z_i(\zeta) = A_i [\cosh(\beta_i\zeta) + \cos(\beta_i\zeta) - \alpha_i \sinh(\beta_i\zeta) + \sin(\beta_i\zeta)]$$

$$0 < \zeta < 1$$

تکیه‌گاه آزاد

$$Z_j(\eta) = A_j [\cosh(\beta_j\eta) + \cos(\beta_j\eta) - \alpha_j \sinh(\beta_j\eta) + \sin(\beta_j\eta)]$$

$$0 < \eta < 1$$

در این رابطه،  $A_i, A_j$  ضرایب مجهول،  $\beta_i, \beta_j$  و

$\alpha_i, \alpha_j$  بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\alpha_i = \frac{\cos(\beta_i) - \cosh(\beta_i)}{\sin(\beta_i) - \sinh(\beta_i)},$$

$$\alpha_j = \frac{\cos(\beta_j) - \cosh(\beta_j)}{\sin(\beta_j) - \sinh(\beta_j)},$$

$$\beta_i = \frac{\pi(2m+1)}{4},$$

$$\beta_j = \frac{\pi(2n+1)}{4}.$$

#### ۴ - نتایج عددی

به منظور بررسی صحت آنالیز مورد استفاده برای صفحات ایزوتروپیک و کامپوزیتی متقارن با شرایط مرزی (SS-SS)، (CC-CC) و (FF-FF) و با تکیه‌گاه خطی میانی، مانند شکل ۳، چند مثال ارائه و نتایج آنها با مراجع مختلف مقایسه شده است. در ادامه از مقایسه نتایج، تطابق خوبی حاصل شد، که دلیلی بر صحت نتایج آنالیز حاضر می‌باشد. در بررسی حاضر ضخامت لایه‌های صفحات کامپوزیتی برابر با چیدمان  $(\beta, -\beta, \beta, -\beta, \beta)$  و از جنس گرافیت اپوکسی با خواص زیر می‌باشد:

$$E_{11} = 138 \text{ GPa},$$

$$E_{22} = 8.96 \text{ GPa},$$

$$G_{12} = 7.1 \text{ GPa},$$

$$\nu_{12} = 0.3.$$

گسترش مطالعات چنگ و زو [۸] بدست آمده است. این توابع بر خلاف توابع مجاز مرسوم و جدا از واقعیت شرایط مرزی هندسی صفحات و تغییر مکان صفر در تکیه‌گاه‌های خطی میانی می‌تواند از بعضی جهات رضایت بخش باشد. نتایج بدست آمده در این تحقیق می‌تواند مبناء خوبی برای ادامه اینگونه مسائل باشد.

### مراجع

- 1- Kim, D.H., "Composite Structures For Civil and Architectural Engineering", E and FN Spon, London, 1995.
- 2- Leissa, A.W. and Narita, Y., "Vibration Studies for Simply Supported Symmetrically Laminated Rectangular Plates", Computer Structures, Vol. 12, No.1, pp.113-32, 1989.
- 3- Varadan, T.K. and Bhaskar, K., "Analysis of Plates", Narosa Publishing House, pp. 86-147, 1999.
- 4- Wu, C.I. and Cheung, Y.K., "Frequency Analysis of Rectangular Plates Continuous in One or Two Direction", J. Earthquake Engineering Structural Dynamics, Vol. 3, pp. 3-14, 1974.
- 5- Kim, CS, and Dickinson, S.M., "The Flexural Vibration of Line Supported Rectangular Plates System", J. Sound Vibration, Vol. 114, No. 1, pp. 29-43, 1987.
- 6- Leissa, AW., "The Free Vibration of Rectangular Plates" J. Sound Vibrations, Vol. 31, No. 2, pp.57-93, 1973.
- 7- Zhou, D. and Cheung, Y.K., "Free Vibration of Line Supported Rectangular Plates Using a Set of Static Beam Function", J. Sound Vibrations, Vol. 223, No. 2, pp. 31-45, 1999.
- 8- Cheung, Y.K. and Zhou, D., "Vibration Analysis of Symmetrically Laminated Rectangular Plates with Intermediate Line Support", J. Computers and Structures, Vol. 79, pp. 33-41, 2001.

در جداول ۲ و ۳ فرکانس‌های بدون بعد اول تا ششم یک صفحه کامپوزیتی متقارن برای زوایای مختلف چیدمان الیاف ( $\beta = 15^0, \dots, 45^0$ ) و مقایسه آنها با مراجع دیگر برای شرایط مرزی متفاوت با یک تکیه‌گاه خطی میانی در هر سمت گزارش شده است. موقعیت‌های دو تکیه‌گاه خطی میانی مانند شکل ۳ در وسط صفحه ( $\alpha_x = \alpha_y = 0.5$ ) قرار دارد. به نظر می‌رسد با افزایش زاویه چیدمان الیاف  $\beta$  برای همه حالت‌ها، فرکانس‌ها تاثیر مهمی بر روی مشخصات ارتعاشی صفحات کامپوزیتی داشته و باعث افزایش آن می‌شود. این افزایش ممکن است به خاطر تقارن مودها و عدم کوپلینگ خمشی و پیچشی در ترم‌های  $D_{16}$  و  $D_{26}$  باشد.

**جدول (۲):** شش فرکانس اول یک صفحه متقارن کامپوزیتی برای چیدمان الیاف مختلف با یک تکیه‌گاه خطی میانی در هر سمت ( $\alpha_x = \alpha_y = 0.5$ ) و شرایط مرزی SS - SS.

Results	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
$\beta = 15$						
Current	48.573	49.483	72.287	73.138	74.933	90.970
Ref. [8]	48.103	50.611	65.763	67.002	81.466	88.709
$\beta = 30$						
Current	54.767	55.960	68.808	70.282	96.973	103.460
Ref. [8]	53.852	57.865	66.028	68.336	105.953	108.430
$\beta = 45$						
Current	57.614	63.096	63.096	68.809	125.021	125.468
Ref. [8]	56.594	63.054	64.806	69.283	117.102	124.918

**جدول (۳):** شش فرکانس اول یک صفحه متقارن کامپوزیتی برای چیدمان الیاف مختلف با یک تکیه‌گاه خطی میانی در هر سمت ( $\alpha_x = \alpha_y = 0.5$ ) و شرایط مرزی CC - CC.

Results	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
$\beta = 15$						
Current	72.775	73.746	94.637	98.593	99.944	108.368
Ref. [8]	68.616	71.132	91.128	91.945	103.268	110.488
$\beta = 30$						
Current	69.891	71.400	87.007	89.720	120.191	130.907
Ref. [8]	71.179	75.405	86.606	88.916	126.933	131.009
$\beta = 45$						
Current	68.403	75.573	75.573	84.144	142.273	145.463
Ref. [8]	72.558	80.080	82.303	87.520	140.902	149.326

### ۵ - نتیجه‌گیری‌ها

در این مقاله یک سری از توابع تغییر شکل به عنوان توابع قابل قبول برای مطالعه مشخصات ارتعاشی صفحات کامپوزیتی متقارن بکار برده شده است. این توابع تغییر شکل از توسعه و